Sari Agriculture Sciences and Natural Resources University

Research on Animal Production, Vol. 16, Issue 2, 2025 p: 104-114

OPEN ACCESS

Research Paper

Estimation of Parameters of the Growth Models of Holstein Calves Using the DOLS Method and Comparing it with Some Non-Linear Models

Mohamad Tajik khari[1], Gholamreza Peykani Machiani[2], Abdolreza Salehi[3] and Mohsen Gholizadeh[4]

1- Ph.D. Student, Department of Animal Science, Faculty of Animal and Fisheries Sciences, University of Agricultural and Natural Resources of Sari, Sari, Iran
2- Associate Professor, Department of Economic Science, Faculty of Agriculture, University of Tehran, Tehran, Iran
3- Associate Professor, Department of Animal and Poultry Science, Faculty of Agricultural Technology, University of Tehran, Tehran, Iran, (Corresponding author: arsalehi@ut.ac.ir)
4- Associate Professor, Department of Animal Science, Faculty of Animal and Fisheries Sciences, University of Agricultural and Natural Resources of Sari, Sari, Iran

Received: 15 April 2024 Revised: 10 July 2024 Accepted: 04 August 2024

Extended Abstract

Background: The study of growth is a key economic aspect of domestic animal breeding, as adult cattle weight is an important trait in breeding programs due to its impact on economic factors, such as maintenance requirements, reproduction, and other biological characteristics.

There are extensive mathematical models, including logistic, Gompertz, Von Bertalanffy, Brody, and Richards, which are used to express the growth capacity and statistical relationships between the age and weight of the animal.

This study focuses on mathematical models that summarize growth patterns using biologically interpretable parameters. These models provide valuable insights for developing breeding strategies by allowing for adjustments in management practices and genetic structures related to growth curves. As a result, analyzing growth curves serves as a foundation for adapting breeding policies, determining nutritional requirements, and making informed decisions about specific technologies. In the growth curve, the **A** parameter represents the weight at maturity—essentially, the maximum weight of the animal. The **B** parameter indicates the time at which the individual reaches its maximum growth rate, while the **K** parameter reflects the growth rate at maturity. Regression coefficients and growth parameters play a critical role in management and breeding decisions, as these parameters typically exhibit good heritability and can be effectively used for the genetic improvement of dairy calves. In this study, we explore the growth pattern of Holstein calves using the dynamic nonlinear model (DOLS) for the first time. We compare its effectiveness with other nonlinear models, such as Gompertz and Logistic.

Methods: For this study, we utilized birth weight and body weight records from 10 to 90 days of age collected at the Kohan Aberdej Agriculture and Industry Unit in Tehran Province. We recorded approximately 10 body weight measurements for each weanling calf, which were initially analyzed using Excel 2007 software. Subsequently, we performed statistical analyses using non-linear Gompertz and logistic models from the nlme statistical package in R software. The nlme package in R is used to fit and compare Gaussian linear and nonlinear mixed-effects models. It allows users to specify variance-covariance structures, enabling the analysis of data with hierarchical or correlated structures. To estimate growth parameters, we employed numerical calculations and the Gauss-Newton algorithm. In the DOLS method, a nonlinear method based on the law of diminishing returns is used to estimate the parameters of the growth model, which correctly estimates the regression coefficients of the growth stages. We evaluated the goodness of fit of the models based on the corrected coefficient of determination (R_Adj^2) and mean square error (MSE).

Results: Both the logistic and DOLS models provide the best description of the growth pattern. These models exhibit high values of R_Adj^2 and the lowest MSE. While the logistic model has demonstrated strong performance in estimating growth parameters for dairy calves in previous studies, it does have a weakness: it tends to overestimate or underestimate body weight at different time points. However, the DOLS model, as demonstrated in this study, accurately predicts body weights at various times without such biases. This is a key strength of the DOLS model. Various models have been introduced in studies to predict maturity weight and maturity rate, with differences often attributed to factors such as breed, management practices, and feeding methods. Notably, the Gompertz model ranked last among the non-linear models. Evaluation indicators confirm that the DOLS model excels, with a high R_Adj^2 value and low MSE. Furthermore, it effectively calibrates time and body weight at turning points, ensuring accurate predictions within the available field data. Here is a corrected and more clearly structured version of your sentence.

In the DOLS model, a concave curve is generated based on the law of diminishing returns, allowing infinite time to be approximated by the time available in real data. This model produces a well-defined function that is differentiable, enabling accurate prediction of the maximum mature weight using the first-order derivative. Additionally, the DOLS method estimates the final weight in the shortest possible time and,

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

Copyright ©2025 Tajik khari et al. Published by Sari Agricultural Sciences and Natural Resources University.
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 Unported License which allows users to read, copy, distribute and make derivative works for non-commercial purposes from the material, as long as the author of the original work is cited properly.

unlike the logistic and Gompertz models, does not require iterative procedures, such as the Gauss-Newton algorithm.
Conclusion: The results showed that, unlike Gompertz and logistic nonlinear models, the DOLS growth model exhibits dynamics in the estimation of growth model parameters. Additionally, while logistic and Gompertz models do not allow for achieving the maximum economic productivity using food inputs, the DOLS model effectively establishes a relationship between the amount of consumed inputs and maximum productivity. Consequently, this model can be employed to provide expert recommendations. By differentiating the DOLS model, it is possible to accurately predict the maturity weight and estimate the optimal time for marketing and selling calves. Because the DOLS growth model provides accurate predictions of maturity weight, it can be incorporated into management plans to help improve economic productivity.

Keywords: Calibration, Goodness of Fit Model, Growth parameters, Law of diminishing returns, Turning point

How to Cite This Article: Tajik khari, M., Peykani Machiani, Gh., Salehi, A., & Gholizadeh, M. (2025). Estimation of Parameters of the Growth Models of Holstein Calves Using the DOLS Method and Comparing it with Some Non-Linear Models. *Res Anim Prod,* 16(2), 104-114. DOI: 10.61882/rap.2024.1471

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]
[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری

مقاله پژوهشی

برآورد پارامترهای مدل‌های رشد گوساله‌های شیرخوار هلشتاین با استفاده از روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا و مقایسه‌ی آن با برخی مدل‌های غیر خطّی

محمّد تاجیک خواری[۱]، غلامرضا پیکانی ماچیانی[۲]، عبدالرضا صالحی[۳] و محسن قلی زاده[۴]

۱- دانشجوی دکتری رشته‌ی ژنتیک و اصلاح نژاد دام، گروه علوم دامی، دانشکده علوم دام و شیلات، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری، ساری، ایران
۲- دانشیار، گروه اقتصاد کشاورزی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تهران، تهران، ایران
۳- دانشیار، گروه علوم دام و طیور، دانشکده فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، تهران، ایران، (نویسنده مسوول: arsalehi@ut.ac.ir)
۴- دانشیار، گروه علوم دامی، دانشکده علوم دام و شیلات، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری، ساری، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۲۷ تاریخ ویرایش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۴
صفحه ۱۰۴ تا ۱۱۴

چکیده مبسوط

مقدمه و هدف: اهمیّت رشد و مطالعه‌ی آن از اصلی‌ترین جنبه‌های اقتصادی در پرورش حیوانات اهلی است چرا که وزن گاو بالغ یک صفت مهمّ در برنامه‌های اصلاح نژادی است که به‌دلیل اثرات آن روی صفات اقتصادی از جمله نیازهای نگهداری، تولیدمثل و سایر صفات بیولوژیکی مورد توجّه قرار می‌گیرد. مدل‌های ریاضی گسترده‌ای از جمله، لجستیک، گمپرتز، ون برتالانفی، برودی و ریچادرز وجود دارد که برای بیان ظرفیّت رشد و نسبت‌های آماری بین سنّ و وزن حیوان مورد استفاده قرار می‌گیرند. مدل‌های ریاضی خلاصه‌ای از وضعیت رشد را که در قالب چند پارامتر دارای تفسیر بیولوژیکی است، تفسیر کرده، فرصت مناسبی را برای توسعه‌ی استراتژی‌های اصلاح نژادی از طریق تعدیل مدیریت و یا ساختارهای ژنتیکی منحنی رشد فراهم می‌کنند. بنابراین، مطالعه‌ی منحنی‌های رشد زمینه‌ی مناسبی را برای تغییر سیاست‌های اصلاح نژادی، تعیین نیازمندی‌های تغذیه‌ای و روند تصمیم‌گیری برای ایجاد یک تکنولوژی خاصّ فراهم می‌کند. فراسنجه‌ی A در منحنی رشد، نشان‌دهنده‌ی وزن بلوغ است و در واقع، حداکثر وزن حیوان است. فراسنجه‌ی B زمان رسیدن یک فرد به حداکثر نرخ رشد را نشان می‌دهد و فراسنجه‌ی K نرخ رشد بلوغ را نشان می‌دهد. ضرایب رگرسیون و فراسنجه‌های رشد نقش مهمّی را در تصمیم‌گیری برای مدیریت و اصلاح نژاد دارند. فراسنجه های رشد از وراثت‌پذیری خوبی برخوردارند و می توان از آن ها در بهبود ژنتیکی گوساله‌های شیری استفاده کرد. در این مطالعه، برای نخستین مرتبه از مدل غیر خطّی پویا (DOLS[1]) برای بررسی وضعیت الگوی رشد گوساله‌های شیرخوار هلشتاین استفاده و با برخی از مدل‌های غیر خطّی مانند گمپرتز و لجستیک، مقایسه و کارآیی این مدل‌ها با همدیگر بررسی شد.

مواد و روش‌ها: برای این منظور، از رکوردهای وزن تولّد و وزن بدن در سنین ۱۰ تا ۹۰ روزگی موجود در واحد کشت و صنعت کوهان ابردژ استان تهران استفاده شد. برای هر گوساله‌ی شیرخوار، تقریباً ۱۰ رکورد وزن بدن ثبت و ابتدا با استفاده از نرم‌افزار Excel۲۰۰۷ مورد بررسی اولیه قرارگرفت. سپس برای تجزیه و تحلیل‌های آماری مدل‌های غیرخطّی گمپرتز و لجستیک از بسته‌ی آماری nlme نرم‌افزار R استفاده گردید. بسته nlme در R برای برازش و مقایسه مدل‌های خطی و غیرخطی اثرات مختلط گاوسی استفاده می‌شود. این بسته به کاربران امکان می‌دهد که ساختارهای واریانس–کوواریانس را مشخص کنند و تجزیه و تحلیل داده‌ها را با ساختارهای سلسله‌مراتبی یا همبسته امکان‌پذیر می‌سازد. فراسنجه‌های رشد، با روش محاسبات عددی و تکرار با استفاده از الگوریتم گاوس‌نیوتون برآورد شدند. در روش DOLS، از یک روش غیر خطّی مبتنی‌بر قانون بازدهی نزولی برای تخمین پارامترهای مدل رشد استفاده شده است که ضرایب رگرسیونی مراحل رشد را به درستی تخمین می‌زند. پس از تجزیه و تحلیل محاسبات، مناسب‌ترین مدل توسط معیارهای برازش نیکوئی مورد ارزیابی قرارگرفت و در آخر، مقدار R^2_{Adj} با استفاده از آزمون تی‌استودنت مورد مقایسه قرار گرفت.

یافته‌ها: نتایج این مطالعه نشان دادند که مدل‌های لجستیک و DOLS با داشتن مقدار بالای R^2_{Adj} و کمترین مقدار MSE، بهترین توصیف از الگوی رشد را دارند. توانایی بالای مدل لجستیک در برآورد فراسنجه‌های رشد گوساله‌های شیری، در بسیاری از مطالعات نشان داده شده است. نقطه‌ی ضعف این مدل، برآورد بیش‌تر یا کم‌تر وزن بدن در زمان‌های مختلف است که این موضوع در اغلب مطالعات نیز مورد تأیید است، امّا مدلDOLS وزن‌های بدن را در زمان‌های مختلف به‌خوبی پیش‌بینی کرد و این مهم‌ترین نقطه‌ی قوّت مدل DOLS است. در مطالعات، مدل‌های مختلفی برای پیش‌بینی وزن بلوغ و نرخ بلوغ معرفی می‌شوند و دلیل آن می‌تواند نژاد، مدیریت و نحوه‌ی تغذیه‌ی آن‌ها باشد. مدل گمپرتز، پس از مدل‌های غیر خطّی، در مرتبه‌ی آخر قرار گرفت. شاخص‌های ارزیابی نشان داد که مدل DOLS علاوه‌بر دارا بودن مقدار R^2_{Adj} بالا و کم‌بودن مقدار میانگین مربعات خطا، توانایی کالیبره‌سازی زمان و وزن بدن در نقطه‌ی عطف را دارد و پیش‌بینی وزن بدن با استفاده از مدل DOLS در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی موجود در مزرعه قرار دارد. در واقع، در مدل DOLS یک منحنی مقعر و مبتنی بر قانون بازدهی نزولی را ایجاد می‌کند و می‌توان زمان بی‌نهایت را به زمان موجود در اطلاعات واقعی نزدیک نماید. مدل DOLS یک تابع خوش‌فرم ایجاد می‌کند که قابلیت مشتق‌گیری از آن وجود دارد و می‌توان با مشتق‌گیری مرتبه‌ی اول، حداکثر وزن بالغ را به درستی پیش‌بینی کرد. در روش DOLS، با صرف کم‌ترین زمان ممکن می‌توان وزن نهایی را تخمین زد و مانند روش‌های لجستیک و گمپرتز، نیازی به تکرار با استفاده از الگوریتم گاوس نیوتون نیست.

نتیجه‌گیری: نتایج نشان دادند که بر خلاف مدل‌های غیرخطّی گمپرتز و لجستیک، مدل رشد غیر خطّی DOLS دارای پویائی در تخمین فراسنجه‌های مدل رشد است. علاوه‌بر آن، با استفاده از مدل‌های لجستیک و گمپرتز، نمی‌توان حداکثر بهره‌وری اقتصادی را با استفاده از نهاده‌های غذائی به‌دست آورد، امّا مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا، توانایی ایجاد ارتباط بین مقدار نهاده‌های مصرفی و حداکثر بهره‌وری را به‌خوبی نشان داد و به این خاطر، می‌توان از این مدل برای ارائه‌ی توصیه‌های کارشناسی و اصلاح نژادی استفاده کرد. با مشتق‌گیری از مدل DOLS، می‌توان مقادیر وزن بلوغ را به درستی پیش‌بینی کرد و زمان بازاریابی و فروش گوساله‌ها را تخمین زد. به‌دلیل آنکه مدل رشد DOLS پیش‌بینی‌های درستی را از وزن بلوغ رائه می‌دهد، می‌توان از آن در برنامه‌های مدیریتی استفاده کرد و در افزایش بهره‌وری اقتصادی کمک گرفت.

واژه‌های کلیدی: برازش مدل، فراسنجه‌های رشد، قانون بازده نزولی، کالیبره‌سازی، نقطه‌ی عطف، نکوئی مدل

1- Dynamic Ordinary Least Square

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

مقدّمه

رشد بدن به‌عنوان تغییرات وزن زنده‌ی حیوان در واحد زمان است که این صفت را می‌توان به‌صورت افزایش تعداد سلول‌های بدنی تعریف کرد (Daskiran *et al.*, 2010). رشدِ پس از تولّد در حیوانات اهلی به دلیل ماهیت اقتصادی تولید، از اهمیّت بیش‌تری برخوردار است، زیرا رشد در این دوران تحت تأثیر عوامل مختلفی از جمله ژنتیک، محیط و اثرات متقابل ژنتیک و محیط قرار می‌گیرد و می‌تواند با تغییرات ایجاد شده در طی حیات که در آن مصرف ماده‌ی غذائی هم وجود دارد، بیان شود (Aggrey, 2002). این تغییرات را می‌توان با اندازه‌گیری وزن بدن در دوره‌های منظم پیگیری و توسط مدل‌های ریاضی برازش و در مورد آن‌ها بحث کرد.

اهمیّت رشد و مطالعه‌ی آن از اصلی‌ترین جنبه‌های اقتصادی در پرورش حیوانات اهلی است چراکه وزن بدن گاو بالغ، یک صفت مهمّ در برنامه‌های اصلاح نژادی است و به دلیل اثرات آن روی صفات اقتصادی از جمله نیازهای نگهداری، تولیدمثل و سایر صفات بیولوژیکی مورد توجّه قرار می‌گیرد (Costa *et al.*, 2011). افزایش تعداد یا اندازه‌ی سلول‌های بدنی همیشه به‌صورت خطّی نیست و معمولاً به‌صورت غیرخطّی قرار می‌گیرد (Aman Ullah *et al.*, 2013) و به این خاطر، رشد از یک منحنی S شکل تبعیت می‌کند که با انواعی از مدل‌های ریاضی قابل برازش است (Kum *et al*, 2010). دلیل سیگوئیدی یا Sشکل بودن رشد در سنین مختلف حیوانات این است که همواره بالاترین میزان رشد در زمان جوانی رخ می‌دهد که موجب خطّی شدن نمودار و به‌عبارتی دیگر، افزایش تعداد سلول‌های بدنی با نرخ افزایشی است که در ادامه، رشدِ حیوان به‌طور آهسته‌ای ادامه پیدا می‌کند. به‌عبارتی دیگر، رشد با سرعت کاهشی هم‌چنان در حال افزایش است و هنگامی که حیوان به وزن بلوغ می‌رسد، شکل منحنی به‌صورت تخت (صاف) درخواهد آمد (Arrang,2002).

مدل‌های ریاضی گسترده‌ای از جمله، لجستیک، گمپرتز، ون برتالانفی، برودی و ریچادرز وجود دارند که برای بیان ظرفیت رشد و نسبت‌های آماری بین سن و وزن حیوان مورد استفاده قرار می‌گیرند (Kum *et al.*, 2010). این مدل‌ها خلاصه‌ای از وضعیت رشد را که در قالب چند فراسنجه دارای تفسیر بیولوژیکی استباشد، ارائه می‌دهند (Salem *et al.*, 2013) و فرصت مناسبی را برای توسعه‌ی استراتژی‌های اصلاح نژادی از طریق تعدیل مدیریت و یا ساختارهای ژنتیکی منحنی رشد فراهم می‌کنند. از طرفی دیگر، مطالعه، بررسی و تجزیه و تحلیل‌های منحنی رشد در نشخوارکنندگان، این امکان را به‌وجود می‌آورد تا بتوان رشد را با قوانین شناخته‌شده‌ی آن مطابقت داد و به کمک آن‌ها برای ارزیابی پتانسیل ژنتیکی موجود زنده اقدام کرد (Arrango, 2002).

شناخت و تفسیر فراسنجه‌های ژنتیکی در منحنی رشد مهم است، زیرا علاوه بر ارزیابی ظرفیت ژنتیکی حیوانات (Aggray, 2002)، می‌توان از آن‌ها برای تنظیم برنامه‌های تغذیه‌ای، تعیین بهترین سنّ کشتار و خصوصاً زمان رسیدن به بلوغ که دارای اهمیّت بسیار بالائی است، استفاده کرد (Daskiran *et al.*, 2010). برآورد صحیح فراسنجه‌های مدل‌های غیرخطّی رشد در محدوده‌ی نمونه‌های اطّلاعات واقعی موجود در مزرعه، از اهمیّت بالائی برخوردار است و بنا بر این تعیین سن کشتار و ارزیابی راندمان رشد در گاو اهمیّت اقتصادی بالایی دارد که دلیل آن، نرخ تولیدمثلی کم و هزینه‌های نگهداری مادری بالای این گونه می‌است (Arrango, 2002)، بنا بر این، اگر وزن گاو را به‌صورت تابعی از زمان در نظر بگیریم، می‌توان در مورد بهترین زمان کشتار حیوانات برای افزایش سودآوری تصمیم‌گیری نمود (Alonso *et al.*, 2018).

روش حداقل مربعات معمولی (OLS: Ordinary Least Square) به‌عنوان یکی از پرکاربردترین روش‌های آماری در تخمین پارامترها به شمار می‌رود. این روش برای نخستین بار توسط فردریک گاوس (Ferdric Gaus) ریاضی‌دان مشهور آلمانی مطرح و هدف از این روش، برآورد فراسنجه‌های منحنی رگرسیونی است، به گونه‌ای که مجموع مربعات خطاء به حداقل ممکن برس بالاترین مقدار R^2 و یا R^2_{Adj} به‌دست آید که در نتیجه‌ی آن، بهترین خطّ رگرسیونی ترسیم شود (Tamari *et al.*, 1996). متأسفانه، با توجّه به این احتمال که در بین مشاهدات آماری، بی‌نهایت توابع غیر خطّی محدّب و مقعر وجود دارند، ممکن است با استفاده از روش آماری حداقل مربعات معمولی (OLS)، نوعی تابع غیر خطّی محدّب به جای یک تابع مقعر خوش‌فرم و مبتنی بر قانون بازدهی نزولی ایجاد نماید که در این صورت، ارائه‌ی هر گونه توصیه کارشناسی و اصلاح نژادی غیر ممکن است. قانون بازدهی نزولی بیان می‌کند که واحدهای اوّلیه‌ی نهاده‌های مصرفی، افزایش وزن یا مقدار تولید محصول را در ابتدا با نرخ افزایشی، بالا می‌برند تا این که تولید یا افزایش وزن بدن به نقطه‌ی خاصّی می‌رسند و پس از آن نقطه (نقطه‌ی برگردان) نرخ افزایش رشد با سرعت آهسته‌ای ادامه پیدا می‌کند تا در نهایت به حداکثر وزن بدن برسد. لازم به ذکر است که از منظر اقتصادی، استفاده از هر نهاده‌ی مصرفی تا نقطه‌ای ادامه پیدا می‌کند که ارزش نهائی تولید با هزینه‌ی آن مساوی و اصطلاحاً سر به سر باشد (Malakouti and Homaei, 1994).

از آنجایی‌که فراسنجه‌های تخمینی در مدل‌های ریاضی از قبیل گمپرتز، لجستیک و غیره، ذاتاً غیر خطّی هستند، بنا بر این برای تخمین آن‌ها باید از تکنیک آزمون و خطاء استفاده شود. این در حالی است که وجود پویائی در روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا (Dynamic Ordinary Least Square) توانسته است بهترین مدل غیر خطّی مقعر را در بین مشاهدات آماری ارائه دهد که علاوه‌بر حداقل‌سازی مجموع مربعات خطاء، بالاترین میزان R^2_{Adj} و کالیبره‌سازی زمان را نیز دارد. نتایج برخی مطالعات مربوط به استفاده از روش حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) (Tohidi mehr *et a.l.*, 2021) نشان می‌دهند که قانون بازده نزولی در مراحل رشد حیوانات، با توجّه به نوع اطّلاعات موجود وجود دارد و در روش DOLS از قانون بازده نزولی برای توصیف رشد در حیوانات استفاده شده است. رشد دارای دو مرحله‌ی افزایشی و کاهشی است (Bran and Roush, 2005) و بنا بر این، بهترین مدل‌ها برای برازش منحنی رشد، مدل‌های مبتنی بر قانون بازدهی نزولی هستند.

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]
[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

بنابراین، به‌خوبی می‌توان نتیجه گرفت که در اطّلاعات تجربی مشاهده شده از رکوردهای وزن بدن، بهترین مدل غیر خطّی رشد، یک مدل مقعر و مبتنی‌بر قانون بازدهی نزولی است که مقدار حداکثر وزن بدن را کالیبره‌سازی (calibration) نماید که این موضوع در مدل‌های رشد گمپرتز، لجستیک و غیره مشاهده نمی‌شود. از آنجایی‌که رشد بدن به‌صورت سیگموئیدی (Sشکل) قرار دارد (Arrango, 2002) از قانون بازدهی نزولی در روش DOLS استفاده می‌شود. لذا، هدف از این مطالعه، معرفی روش حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) به‌عنوان یک مدل ریاضی جدید در تخمین فراسنجه‌های رشد است و توانمندی این مدل با سایر مدل‌های ریاضی همانند لجستیک، گمپرتز، از قبیل تخمین صحیح وزن در نقطه‌ی عطف و زمان‌های دلخواه مورد مقایسه قرار خواهد گرفت تا بتوان بهترین مدل رشد را انتخاب و از آن در تدوین رویکردهای اصلاح نژادی استفاده کرد.

مواد و روش‌ها

برای این مطالعه از مدل‌های ریاضی غیر خطّی و مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) برای تعیین بهترین الگوی رشد و ارائه‌ی توصیه‌های اقتصادی با استفاده از اطّلاعات مربوط به ۵۶ راس گوساله‌ی شیرخوار هلشتاین واحد کشت و صنعت ابردژ استان تهران انجام شد. ۱) وزن تولّد گوساله‌ها، بلافاصله پس از تولّد ثبت و رکوردهای آن‌ها در دفتر زایش، ثبت شد. گوساله‌هایی که در زمان زایش دچار سخت‌زائی بودند، از محاسبات حذف شدند. برنامه‌ی تغذیه‌ای این گوساله‌ها به این صورت بود که از روز تولّد تا سه روز پس از آن، فقط از آغوز مصرف کردند و از روز سوم، شیر و جیره‌ی آغازین (Starter) در اختیار آن‌ها قرار گرفت. هم‌چنین، آب به‌صورت آزاد از روز چهارم در اختیار گوساله‌ها قرار گرفت. ۲) وزن‌کشی‌ها پس از تولّد به‌طور مرتب با استفاده از ترازوی دیجیتال هر ده روز انجام و رکوردها به‌طور دقیق ثبت شدند. پس از ویرایش اطّلاعات و حذف داده‌های پرت، در مجموع از ۵۳۰ رکورد وزن بدن برای برازش منحنی رشد استفاده شد.

روش‌های مورد استفاده: مدل‌های ریاضی غیرخطّی گمپرتز، لجستیک و مدل بسط‌یافته‌ی حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) برای توصیف منحنی رشد گوساله‌های شیرخوار مورد استفاده قرار گرفتند. فراسنجه‌های A، B و K در مدل‌های گمپرتز و لجستیک، به ترتیب نشان‌دهنده‌ی وزن بلوغ، سرعت رشد و نرخ بلوغ هستند. فراسنجه‌های A_1 و A_2 در مدل DOLS نشاندهنده‌ی سرعت رشد در گوساله‌های شیری هستند که چنانچه ضرایب رگرسیونی A_1 و A_2 در مدل DOLS بالا باشند، سرعت بالای رشد و افزایش نرخ بلوغ (مترادف با فراسنجه‌ی K در مدل‌های لجستیک و گمپرتز) را نشان می‌دهند. روش حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) می‌تواند در محدوده‌ی اطّلاعات موجود در یک واحد پرورش گاو شیری و یا گوشتی، بهترین تابع درجه‌ی سوم مقعر و مبتنی بر قانون بازدهی نزولی را از بین انواعی از مدل‌های رشد تخمین بزند که توانایی کالیبره‌سازی را نیز داشته باشد (Tajik khari *et al*., 2024). اطّلاعات موجود در افزایش وزن بدن نشان می‌دهد که می‌توان از قانون بازدهی نزولی استفاده کرد و بنا بر این، روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) با استفاده از قانون بازدهی نزولی می‌تواند بهترین منحنی رشد را توصیف نماید. در واقع، با استفاده از اطّلاعات وزن بدن، یک مدل (تابع) درجه‌ی سوم مقعر و مبتنی بر قانون بازدهی نزولی ایجاد می‌شود که توانایی کالیبره‌سازی (Calibration) وزن بدن را در زمان‌های مشخص دارد.

جدول شماره‌ی ۱ معادلات غیر خطّی مورد استفاده را نشان می‌دهد.

جدول ۱- مدل‌های غیر خطّی درنظر گرفته‌شده برای برازش منحنی رشد در گوساله‌های شیرخوار هلشتاین

Table1. Nonlinear models considered for fitting the growth curve in Holstein weanling calves.

مدل (model)	فرمول (formula)	مرجع (references)
گمپرتز Gompertz function	$Y= A (exp-B exp^{(-kt)})$	Fathi Nasri *et al*., 2008
لجستیک Logistic function	$Y=A-(1+B exp^{(-kt)})$	Nelder, J.A. 1961
مدل حداقل مربعات معمولی پویا (DOLS) Dynamic Ordinary Least Square (DOLS)	$Y= A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3$	Tajik Khari *et al*., 2024

در مدل‌های لجستیک و گمپرتز، Y وزن بدن در زمان t، A وزن بلوغ، B نرخ رشد از زمان تولّد تا نقطه‌ی عطف، K نرخ بلوغ و t سنّ حیوان هستند. در مدل بسط‌یافته‌ی پیکانی، A_0 عرض از مبدا، A_1 شیب خط منحنی در مرحله‌ی اول اقتصادی، A_2 شیب خط منحنی در مرحله‌ی دوم اقصادی، A_3 شیب خط منحنی در مرحله ی سوم اقتصادی و t سنّ حیوان هستند.

معیارهای ارزیابی
ضریب تبیین (R^2)

$$R^2= \frac{SS_{reg}}{SS_{tot}} \quad (۱)$$

ضریب تبیین در واقع نشان‌دهنده‌ی سهم عوامل قابل کنترل در توزیع و پراکنش بین مشاهدات است و برابر با نسبتی از پراکنش صفت است که به وسیله‌ی عوامل قابل کنترل ایجاد شده است. ضریب تبیین بالا نشان دهنده‌ی این است که همواره بخش عمده‌ای از عوامل موثر بر روی صفت موردنظر به‌صورت قابل کنترل درآمده است. مقدار ضریب تبیین از صفر تا یک متغیر است و بهترین مدل‌ها مدلی است که ضریب تبیین آن‌ها به عدد یک (۱) نزدیک‌تر است.

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

ضریب تبیین تصحیح شده (R^2_{Adj}) به‌صورت معادله‌ی شماره‌ی ۲ ($R^2_{Adj} = \frac{(n-1)}{(n-p)}(1-R^2)$) بیان می‌شود (Da Silva *et al.*, 2013). در این معادله، n تعداد مشاهدات و p تعداد پارامتر هستند.

میانگین مربعات خطا (MS_e)

$$MS_e = \frac{SS_e}{df_e} \qquad (۲)$$

میانگین مربعات خطا (باقی مانده) معمولاً با افزایش متغیرهای جدید به مدل کاهش می‌یابد. انتخاب یک مدل دارای تعداد زیادی متغیر، خطر بالایی دارد، زیرا این امکان وجود دارد که در این صورت، درجه‌ی آزادی خطا کاهش یابد و در ادامه‌ی آن، مجموع مربعات خطا افزایش یابد و در نتیجه، واریانس (مجموع مربعات) خطا افزایش خواهد یافت.

مدل‌های غیر خطّی بر روی وزن بدن گوساله‌های شیرخوار با استفاده از بسته‌ی nlme (Pinheiro *et al.*, 2016) نرم‌افزار R (نسخه‌ی ۴/۰/۴) برازش و فراسنجه‌های مدل محاسبه شدند. فراسنجه‌های رشد با روش محاسبات عددی و تکرار با استفاده از الگوریتم گاوس–نیوتون برآورد شدند. در این روش، ابتدا برای هر یک از فراسنجه‌های مدل‌های رشد لجستیک و گمپرتز، یک مقدار عددی به‌عنوان پیش‌فرض قرار داده می‌شود و سپس، با استفاده از آن‌ها، تخمین صورت می‌گیرد. هنگامی‌که فراسنجه‌های مدل محاسبه شدند، از آن‌ها برای به‌دست آوردن سن و وزن در زمان نقطه‌ی عطف استفاده می‌شود. پس از محاسبه‌ی میزان R^2_{Adj}، تفاوت میان R^2_{Adj} مدل‌ها توسط آزمون t استیودنت مورد مقایسه قرار گرفت.

نتایج و بحث

مقدار R^2_{Adj} تمام مدل‌ها بالاتر از ۹۰٪ است که نشان‌دهنده‌ی برازش بسیار مناسب مدل‌های مختلف است. مقادیر مربوط به فراسنجه‌های A، B و K ، مقادیر R^2_{Adj}، MSE و هم‌چنین ضرایب رگرسیونی منحنی رشد مدل حداقل مربعات غیرخطّی پویا در جدول۲ نشان داده شده‌اند. در این مطالعه، مشخص شد که مدل‌های لجستیک و حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) دارای بالاترین مقدار R^2_{Adj} و کمترین میزان MSE بودند که به‌عنوان بهترین مدل معرفی شدند. البتّه، تفاوت آماری بین مدل‌های لجستیک و حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) معنی‌دار نبود امّا مدل حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) برازش دقیق‌تری را بر روی اطّلاعات وزن بدن داشت. مشابه با نتایج این مطالعه، بهترین مدل برای برازش منحنی رشد در گوساله‌های نر گاومیش نژاد مورا در ترکیه، مدل لجستیک بود و پس از آن، مدل‌های گمپرتز و برودی بودند (Araujo *et al.*, 2011). مطالعه‌ی قلی‌زاده و تاجیک خواری (Gholizadeh & Tajickhari, 2022) نیز نشان داد که مدل رشد لجستیک بهترین مدل برای برازش منحنی رشد در گوساله‌های نر و ماده‌ی هلشتاین بود و پس از آن مدل گمپرتز در رتبه‌ی بعدی قرار گرفت.

برخلاف یافته‌های این پژوهش، مطالعات دیگری بر روی رکوردهای وزن بدن گاوهای کاراکو برزیل نشان دادند که بهترین مدل برای توصیف الگوی رشد بر اساس دو معیار میانگین مربعات خطا و ضریب تبیین تصحیح شده، مدل برودی بود (Moreir *et al.*, 2016). مطالعات مختلفی نشان داده‌اند که مدل‌های مختلفی در برازش منحنی رشد حیوانات وجود دارند که از دلایل اصلی آن می‌توان به سطوح مدیریتی، تغذیه، انتخاب حیوانات کوچک‌تر و تفاوت نرخ بلوغ در بین نژادها اشاره کرد.

یکی از نقاط ضعف اساسی در مدل‌های رشد غیر خطّی، تخمین وزن بدن بالغ یا وزن تولّد، به‌مقدار کمتر یا بیشتر از مقدار واقعی است. در مطالعه‌ی گانگوچه و همکاران نشان داده شد که مدل برودی، علاوه بر آنکه دارای تفسیر آسان و محاسبات ساده‌ای بود، امّا وزن بدن بالغ را در زمان رشد، بسیار بالاتر از حد واقعی تخمین زد (Gbangboche *et al.*, 2011) و این می‌تواند به‌عنوان نقطه‌ی ضعف اساسی این مدل باشد. از طرفی دیگر، مقادیر وزنی تخمین‌زده شده، معمولاً در قالب رکوردهای واقعی وزن بدن قرار نمی‌گیرند و کمتر یا بیشتر از مقدار واقعی تخمین زده می‌شوند.

با توجّه به اطّلاعات جدول۳، مدل‌های ریاضی غیر خطّی رشد، توانائی کالیبره‌سازی زمان رسیدن به وزن بلوغ را ندارند؛ به عبارتی دیگر، با استفاده از مدل‌های غیرخطّی لجستیک و گمپرتز، نمی‌توان زمان رسیدن به وزن بلوغ را به درستی پیش‌بینی کرد. هنگامی که مدل‌های ریاضی لجستیک و گمپرتز نسبت به زمان، حداکثرسازی شوند، زمان رسیدن به وزن بلوغ، خارج از محدوده‌ی اطّلاعاتی قرار خواهد گرفت. روش حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) در تخمین فراسنجه‌های منحنی رشد غیر خطّی درجه‌ی سوم مقعر و مبتنی بر قانون بازدهی نزولی، تلاش می‌کند تا زمان بی‌نهایت را به حداکثر زمان که در آن، گوساله‌ها بالاترین وزن را به‌دست آورده‌اند و در نمونه‌ی اطّلاعات واقعی نیز وجود دارد، انتقال دهد. به‌عنوان نمونه، همان طور که در جدول ۳ نشان داده شده است، زمان رسیدن به حداکثر وزن بدن در گوساله‌ی شماره‌ی ۵۷۵۷ با استفاده از مدل‌های لجستیک و گمپرتز، به ترتیب ۱۵۳۸۹/۰۵ و ۲۹۰۵ روز است که این زمان‌ها در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی قرار ندارند و با اطّلاعات موجود در نمونه‌های واقعی که ۹۰ روز است، فاصله‌ی بسیار زیادی دارند. این درحالی است که مدل حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) توانایی کالیبره‌سازی زمان را به خوبی دارد و به‌راحتی زمان رسیدن به حداکثر وزن را به‌درستی و با صرف کم‌ترین زمان ممکن تخمین می‌زند و پیش‌بینی زمان رسیدن به وزن مشخص در زمان دلخواه را در محدوده‌ی اطّلاعاتی قرار می‌دهد. در ادامه، با تخمین بهترین ضرایب رگرسیون غیر خطّی در روش DOLS، به‌دنبال نقطه‌ی عطف صحیح است که این نقطه‌ی عطف تخمین‌زده شده، در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی قرار داشته باشد. بنابراین، مدل ریاضی لجستیک، علی‌رغم دارابودن R^2_{Adj} بالا، توانایی تخمین صحیح زمان رسیدن به حداکثر وزن بدن و به‌عبارتی دیگر، کالیبره‌سازی را ندارد.

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

جدول ۲- فراسنجه‌های تخمین‌زده شده، ضرایب تبیین تصحیح‌شده (R^2_{Adj})، و میانگین‌های مربعات خطا برای منحنی‌های رشد مختلف در گوساله‌های نر و ماده‌ی هلشتاین

Table2. Estimated parameters, corrected coefficients of determination (R^2Adj), and mean square errors for different growth curves in male and female Holstein calves

شماره‌ی گوساله	51040	5757	5761	51046
Gompertz Function تابع گمپرتز	506.87 = *A* 5.0478 = *B* 0.003 = *K*	389.0115 =A 2.623 =B 0.0083 =K	*A*= 560.01 3.075 =*B* 0.0063 =*K*	221.92 =*A* 2.14 = *B* 0.01272 =*K*
R^2_{Adj} ضریب تبیین تصحیح‌شده	0.92	0.97	0.98	0.96
MSE میانگین مربعات خطا	11.88	9.18	8.82	7.77
Logistic function تابع لجستیک	283.05 =*A* 7.794 =*B* 0.017 =*K*	187.9 =A 5.541 =B 0.023 = K	184.92 =*A* 6.431 = *B* 0.0209 = *K*	153.6 =*A* 4.645 =*B* 0.03 = *K*
R^2_{Adj} ضریب تبیین تصحیح شده	0.94	0.98	0.99	0.97
MSE میانگین مربعات خطا	12.66	8.24	5.22	6.2302
حداقل مربعات غیر خطّی پویا Dynamic Ordinary Least Square	A_0= 44 A_1= -1.077 A_2= 0.045 A_3= -0.000289	A0= 30.91 A1= -0.096 A2= 0.49 A3= -0.032	A_0= 35 A_1= 1.0544 A_2= 0.112 A_3= -0.0026	A_0= 38 A_1= -0.78 A_2= 0.045 A_3= -0.0003
R^2_{Adj} ضریب تبیین تصحیح شده	0.97	0.99	0.96	0.96
MSE میانگین مربعات خطا MSE	11.004	2.58	9.01	14.32

A، B و K به ترتیب نشان‌دهنده‌ی وزن بلوغ بدن (کیلوگرم) (میانگین وزن در زمان بلوغ)، سرعت رشد بدن و نرخ بلوغ هستند. همچنین A_1، A_2 و A_3 به‌ترتیب شیب خط رگرسیون در مرحله‌ی اوّل، مرحله‌ی دوم و مرحله‌ی سوم رشد را نشان می‌دهند.

A, B, and K respectively represent body weight at puberty (kg) (average weight at puberty), body growth rate, and maturation rate. A1, A2m and A3 are the slopes of the regression line in the first, second, and third stages of growth, respectively.

جدول ۳- زمان رسیدن به حداکثر وزن بدن با استفاده از مدل‌های لجستیک، گمپرتز و حداقل مربعات معمولی پویا (DOLS)

Table 3. Maximizing the time to reach maturity weight using logistic, Gompertz, and dynamic ordinary least squares (DOLS) models

شماره‌ی گوساله (Calve number)	حداکثرسازی فیزیکی بر اساس زمان (t) (Time-based physical maximization)		
	مدل گمپرتز (Gompertz model)	مدل لجستیک (logistic model)	مدل DOLS (dynamic ordinary least square model)
5757	2905	15389.05	90
51040	9252	233.33	90
5761	3887	3512	91
51046	813.148	869	90

DOLS = Dynamic Ordinary Least Square

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

در جدول۲، پارامتر A وزنِ بلوغ را نشان می‌دهد. Bahreini Behzadi (2015) پارامتر A را به‌عنوان متوسط وزن بدن در زمان بلوغ، صرف نظر از تغییرات کوتاه محیطی (مانند آب و هوا، تغذیه و مدیریت) معرفی می‌نماید. در مجموع، پارامتر A وزن بدن در زمان بلوغ تفسیر می‌شود. در این مطالعه، وزن بلوغ در مدل لجستیک برای گوساله‌های شماره‌های ۵۷۵۷، ۵۱۰۴۰، ۵۷۶۱ و ۵۱۰۴۶ به‌ترتیب، ۱۸۷/۹، ۲۸۳/۰۵۶۱، ۱۹۴/۸۲۳۵ و ۱۵۳/۶کیلوگرم برآورد گردید. اگرچه مدل لجستیک دارای اعتبار بالائی است، امّا وزن بلوغ را در برخی موارد کمتر و در برخی موارد بیشتر از حد واقعی (۱۱۲/۵، ۱۰۱، ۹۹ و ۱۱۳کیلوگرم) پیش‌بینی می‌کند که نتیجه‌ی آن، بروز خطا در توصیه‌های اصلاح نژادی و تعیین بهترین زمان کشتار حیوان می‌شود. در همین راستا، یافته‌های آرایجو و همکاران Araujo) *et al*., 2012) بر روی رکوردهای وزن بدن گاومیش‌های نر مورا نشان دادند که کمترین مقدار وزن بلوغ توسط مدل رشد لجستیک تخمین زده شد (۴۲۸/۸ کیلوگرم). در مطالعه دیگری، بالاترین وزن بلوغ توسط مدل برودی تخمین زده شد (Salem *et al*., 2013). هم‌چنین، نتایج مطالعات مختلفی نشان داده‌اند که مدل‌های رشد، وزن بلوغ را در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی تخمین نمی‌زنند و مدل‌های لجستیک و گمپرتز وزن را در سنین مختلف، بالاتر و یا پائین از حد واقعی تخمین می‌زنند (Lopez *et al*, 2011) که با یافته‌های این مطالعه کاملاً مطابقت دارد. در مطالعه‌ی حاضر، مدل گمپرتز نیز وزن بدن بالغ را بسیار بالاتر از حدّ واقعی تخمین زده است که این میزان نیز در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی قرار ندارد و بنا بر این، این مدل صحّت و دقّت کافی را برای ارائه‌ی توصیه‌های اصلاح نژادی ندارد. در ادامه‌ی نتایج این مطالعه که مشخص است، استفاده از روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) می‌تواند به درستی تمام وزن‌ها را در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی با R^2_{Adj} بالا و حداقل میزان خطا و با طیّ یک مسیر آسان در محاسبات و حداقل زمان ممکن (۵ الی ۱۰ ثانیه) (Shadan *et al*., 2021) پیش‌بینی نماید. با توجّه به این موارد، می‌توان گفت که روش حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) به تنهایی می‌تواند بهترین مدل رشد را نسبت به سایر مدل‌های فوق ارائه نماید. یعنی علاوه بر آن که از R^2_{Adj} برخوردار است، توانایی تخمین درستِ وزن بدن را در زمان‌های دلخواه دارد و بنا بر این، این مدل برای بررسی منحنی رشد و ارائه‌ی توصیه‌های اصلاح نژادی قابل استفاده است.

آزمون‌های اعتبارسنجی مدل‌های رشد

برای بررسی توانمندی مدل‌های رشد در جهت ارائه‌ی توصیه‌های کارشناسی و اصلاح نژادی، باید هر مدل مورد آزمون قرار بگیرد که شامل موارد زیر است:

آزمون جبری

همان‌طور که در جدول۲ نشان داده شده است، پارامترهای شیب خط رشد توسط سه مدل رگرسیونی غیر خطّی لجستیک، گمپرتز و DOLS برآورد شده‌اند. از نظر جبری، علائم مربوطه صحیح هستند و مدل‌ها از R^2_{adj} بالایی نیز برخوردار هستند. پارامتر K در واقع نشان‌دهنده‌ی سرعت (نرخ) بلوغ است و سرعت رسیدن به وزن بلوغ از زمان تولّد را نشان می‌دهد. هر اندازه این پارامتر بزرگتر باشد، حیوانات سریع‌تر به وزن بلوغ می‌رسند (Garnero *et al*., 2005). بر اساس دیدگاه داسیلوا و همکاران (Da Silva *et al*., 2012)، در شرایطی که حیوانات وزن تولّد مشابهی را داشته باشند، حیواناتی که نرخ بلوغ بیش‌تری را دارند، سریع‌تر به وزن بلوغ خواهند رسید. در این مطالعه، مشخص شده است که در مدل لجستیک، وزن بلوغ نسبت به مدل گمپرتز، کمتر برآورد شده است که این موضوع نشان‌دهنده‌ی نرخ بلوغ بیشتر در گوساله‌های شیرخوار است و این نتایج با مطالعه‌ی داسیلوا و همکاران (Da Silva *et al*., 2012) مطابقت دارند. همسو با این نتایج، Araujo و همکاران (۲۰۱۲) بیش‌ترین مقدار فراسنجه K را توسط مدل لجستیک (۰/۰۰۴۹) برآورد کردند. هم‌چنین، Stewart and Martin (1981) بر روی گاوهای نژاد آنگوس، مقدار پارامتر K را ۰/۰۵۸ و برای گاوهای نژاد شورت‌هورن، ۰/۰۶۶ برآورد نمودند. نرخ بلوغ (K) در مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) مترادف با شیب منحنی رشد در مرحله‌ی اوّل و دوم منحنی است. همان طور که در نمودار (الف) شماره‌ی ۱ نشان داده شده است، رشد حیوان در مرحله‌ی اوّل با شیب افزایشی است و در مرحله‌ی دوم، رشد با نرخ کاهشی (سرعت رشد کمتر) ادامه پیدا می‌کند. هر اندازه این ضریب بزرگتر باشد، شیب خط تندتر (K بیشتر) و زمان رسیدن به وزن بلوغ کمتر خواهد بود.

جدول۴ وزن بدن را در زمان نقطه‌ی عطف نشان می‌دهد. مطابق با مطالعه‌ی گیل (Gille, 2015)، نقطه‌ی عطف، زمانی است که بالاترین نرخ رشد در حیوان اتفاق می‌افتد و از این نقطه، جهت تقعر منحنی رشد تغییر یافته، شکل منحنی از حالت تقعر به حالت تحدّب تغییر خواهد کرد و شکل منحنی به‌صورت سیگموئیدی خواهد شد (Kum *et al*., 2010). در مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS)، نقطه‌ی عطف در مرحله‌ی دوم روی می‌دهد (محل نقطه‌ی A در منحنی الف، شکل ۱) و سپس رشد حیوان وارد مرحله‌ی سوم خواهد شد که در اینجا رشد با سرعت آهسته‌ای رو به افزایش است تا در انتها به بلوغ برس و جهت منحنی به‌صورت صاف درخواهد آمد. در واقع، رشد در مرحله‌ی سوم به مراتب کاهش خواهد یافت و به تدریج به صفر می‌رسد که این یافته‌ها با نتایج مطالعه‌ی Lambe (2006) مطابقت دارند. شکل ۱ (الف) نشان‌دهنده‌ی قانون بازدهی نزولی و سه مرحله‌ی اساسی رشد بدن در مدل غیر خطّی پویا (DOLS) است. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که مدل DOLS به‌صورت غیرخطّی است و با افزایش مقدار نهاده‌های مصرفی در ابتدای دوره‌ی پرورش، رشد با سرعت بالائی افزایش می‌یابد تا در نهایت به نقطه‌ی عطف برسد و سپس رشد بدن با سرعت آهسته‌ای ادامه پیدا می‌کند. همان طور که مشخص است، وزن بدن در نقطه‌ی عطف در مدل‌های لجستیک و گمپرتز در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی قرار ندارد و وزن بدن در زمان نقطه‌ی عطف از وزن بدن در واقعیت بالاتر برآورد شده است. در ادامه، نتایج جدول ۴ نشان می‌دهند که تخمینِ وزن بدن در نقطه‌ی عطف با استفاده از مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی قرار دارد. این در حالی است که به‌عنوان مثال، وزن در نقطه‌ی عطف توسط مدل‌های لجستیک و گمپرتز برای گوساله‌ی

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

شماره‌ی ۵۷۵۷، به‌ترتیب ۷۳/۴۳ و ۱۱۶/۰۵۴ کیلوگرم برآورد شده است که این مقادیر در محدوده‌ی رکورد وزن بدن وجود ندارند. مدل بسط‌یافته‌ی حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) شیب مراحل رشد را از ابتدا تا زمان رسیدن به بلوغ، به سه مرحله‌ی اصلی (مرحله‌ی اوّل، مرحله‌ی دوم و مرحله‌ی سوم) تقسیم‌بندی می‌نماید. برای آن که بتوان یک تابع خوش‌فرم، مقعر و مبتنی بر قانون بازده نزولی به‌دست آورد، ضریب رگرسیون در مرحله‌ی دوم ($A_2 > ۰$) باید مثبت و در مرحله‌ی سوم باید منفی ($A_3 < ۰$) باشد (Tajik khari *et al.*, 2024) و نشان‌دهنده‌ی افزایش وزن بدن با سرعت بالا است و رشد بدن با نرخ افزایشی است و در انتهای مرحله‌ی دوم، نقطه‌ی عطف وجود دارد. به‌عبارتی دیگر، مرحله‌ی دوم رشد به نقطه‌ی عطف در منحنی رشد ختم می‌شود و نقطه‌ی عطف، حداکثر رشد حیوان است.

جدول ۴- برآورد وزن بدن (کیلوگرم) در زمان نقطه‌ی عطف با استفاده از مدل‌های ریاضی مختلف

Table 4. Estimation of body weight (kg) at the time of turning point using different mathematical models

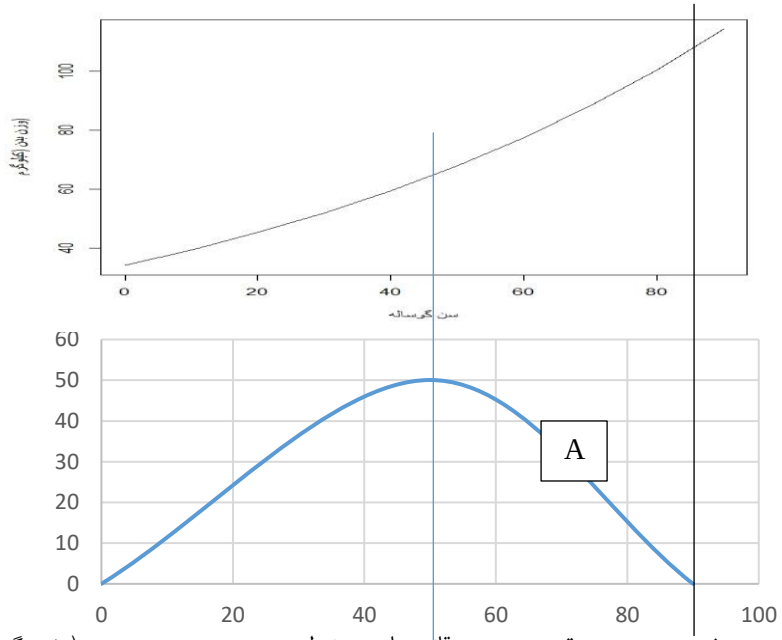
وزن بدن واقعی در ۹۰ روزگی (Actual body weight at 90 days)	تخمین وزن بدن در نقطه‌ی عطف (Estimation of body weight at the turning)			شماره‌ی گوساله (Calve number)
	DOLS (dynamic ordinary least square model)	لجستیک (logistic model)	گمپرتز (Gompertz model)	
112.5	50.06	73.43	116.054	5757
101	51.89	123.49	559.36	51040
113	50.089	88.84	176	5761
113	49.8	56.934	59.82	51046

DOLS روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا است.

DOLS is the Dynamic Nonlinear Least Squares method.

علاوه‌بر وجود علائم صحیح جبری در ضرایب رگرسیونی، مقادیر بالای R^2_{Adj} نیز برای بررسی اعتبار یک مدل رگرسیونی مهم و ضروری هستند که در این مطالعه، تمام ضرایب تعیین تصحیح‌شده، بالاتر از ۹۰٪ هستند. در اصل، ضریب تعیین تصحیح‌شده نشان می‌دهد که مدل بکاررفته توجیه خیلی خوبی از پراکندگی اطّلاعات را دارد و براساس تعداد فراسنجه‌های مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد (Da silva *et al.*, 2013).

علائم جبری در روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) به‌صورت $Y_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1\, t + \hat{A}_2\, t^t + \hat{A}_3\, t^3$ بیان می‌شوند و بنا بر این، برای ایجاد یک تابع خوش‌فرم و مشتق‌پذیر لازم است علائم ضرایب مختلف $\hat{A}_1>۰$ و یا $\hat{A}_1<۰$ ، $\hat{A}_2>۰$ و $\hat{A}_3 <۰$ باشند. با توجّه به نتایج جدول ۲، تمام علائم ضرایب به درستی تخمین زده شده‌اند و بنا بر این، این مدل یک مدل خوش‌فرم و مقعر است.



شکل ۱- الف. منحنی رشد درجه‌ی سوم مقعر و مبتنی بر قانون بازدهی نزولی و ب. منحنی درجه‌ی دوم (مشتق‌گیری از منحنی الف)

Figure 1. (A) The concave cubic growth curve based on the law of diminishing returns and (B) the quadratic curve representing the first derivative of curve A.

آزمون حداکثرسازی مدل رشد:

اطّلاعات موجود در جدول۴ مقادیر حداکثرسازی مدل‌های مختلف را نشان می‌دهد. در مدل‌های رشد لجستیک و گمپرتز، چون برآورد مقدار بازده نهایی (مشتق‌گیری از مدل اوّلیه) در محدوده‌ی اطّلاعاتی واقعی قرار نمی‌گیرد، بنا بر این، نمی‌توان از این مدل‌ها برای ارائه‌ی توصیه‌های کارشناسی استفاده کرد؛ در واقع، این مدل‌ها توانایی کالیبره‌سازی (Calibration) زمان را نخواهند داشت. بر اساس یافته‌های این مطالعه، در مدل

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) یک تابع درجه‌ی سوم مقعر ایجاد می‌شود که توانایی کالیبره‌سازی را داشته باشد و به‌عبارتی، مدل DOLS، بر خلاف مدل‌های لجستیک و گمپرتز، یک تابع خوش‌فرم و مشتق‌پذیر از میان انواعی از مدل‌های غیر خطّی رشد به‌دست می‌آورد و می‌تواند زمان بی‌نهایت را به حداکثر زمان موجود در اطّلاعات واقعی نزدیک نماید. بنا بر این، از آنجایی که پس از محاسبه‌ی مقدار بازدهی نهایی از مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS)، تمامی مقادیر زمان در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی قرار می‌گیرند، می‌توان گفت که برای ارائه‌ی توصیه‌های اصلاح نژادی، می‌توان از روش حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) استفاده کرد.

نتیجه‌گیری کلی

نتایج این مطالعه نشان می‌دهند که مدل حداقل مربعات غیرخطّی پویا (DOLS) از اعتبار بسیار بالائی در تخمین و پیش‌بینی وزن بلوغ، زمان رسیدن به بلوغ و تعیین نقطه‌ی عطف برخوردار است که این پیش‌بینی‌ها در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی مزرعه قرار دارد. علاوه‌بر آن، توانایی این مدل در کالیبره‌سازی پیش‌بینی وزن بدن و تعیین نقطه‌ی عطف صحیح در محدوده‌ی اطّلاعات واقعی، تخمین ضرایب صحیح مدل رشد و زمان رسیدن به وزن بلوغ بسیار بالا است. بنا بر این، می‌توان برای تعیین بهترین زمان کشتار و ارائه‌ی توصیه‌های اصلاح نژادی و اقتصادی از آن استفاده کرد. از طرفی، مدل حداقل مربعات غیر خطّی پویا (DOLS) می‌تواند به‌عنوان یک تابع تولید در برآورد سودآوری واحدهای تولیدی به درستی به‌کارگرفته شود که در پژوهش‌های آینده و برای تحلیل سودآوری می‌توان از آن‌ها استفاده کرد.

تشکّر و قدردانی

این مطالعه در مزرعه شرکت کشت و صنعت کوهان ابردژ استان تهران صورت گرفت. از مدیریت محترم این مجموعه بابت در اختیار قراردادن رکوردهای موجود صمیمانه سپاس‌گزاریم.

References

Aggrey, S. E. (2002). Comparison of three nonlinear and spline regression models for describing chicken growth curves. *Poultry Science*, *81*(12), 1782-1788.

Alonso, J., Díez, J., Luaces, O., & Bahamonde, A. (2018). A new method to learn growth curves of beef cattle using a factorization approach. *Computers and Electronics in Agriculture*, *151*, 77-83.

Araújo, R. O. D., Marcondes, C. R., Damé, M. C. F., Garnero, A. D. V., Gunski, R. J., Everling, D. M., & Rorato, P. R. N. (2012). Classical nonlinear models to describe the growth curve for Murrah buffalo breed. *Ciência Rural*, *42*, 520-525.

Bahreini, B. M., Aslaminejad, A. A., Sharifi, A. R., & Simianer, H. (2014). Comparison of mathematical models for describing the growth of Baluchi sheep.

Beltran, J. J., Butts Jr, W. T., Olson, T. A., & Koger, M. (1992). Growth patterns of two lines of Angus cattle selected using predicted growth parameters. *Journal of Animal Science*, *70*(3), 734-741.

Costa, R. B., Misztal, I., Elzo, M. A., Bertrand, J. K., Silva, L. O. C., & Łukaszewicz, M. (2011). Estimation of genetic parameters for mature weight in Angus cattle. *Journal of Animal Science*, *89*(9), 2680-2686.

Da Silva Marinho. K.N., De Freitas, A.R., Da Silva Falcao, A.J. and Dias, F.E.F. (2013). Nonlinear models for fitting growth curves of Nellore cows reared in the Amazon Biome. *Revista Brasileira de Zootcnia.* 42(9), 645-650

Daskiran, I.,koncogul, S., and Bingol, M. (2010). Growth characteristics of non-linear Norduz female and male lambs. *Journal of Agricultural Sciences.* 16, 2-69

Gano G, Blanco M, Casasús I, Cortés-Lacruz X and Villalba D (2016) Comparison of B splines and non-linear functions to describe growth patterns and predict mature weight of female beef cattle. *Animal Production Science*, 56, 1787-1796.

Gbangboche, A. B., Alkoiret, T. I., Toukourou, Y., Kagbo, A., & Mensah, G. A. (2011). Growth curves of different body traits of Lagune cattle. *Research Journal of Animal Science*, *5*(2), 17-24.

Gholizadeh, M., & Tajikkhari, M. (2024). Growth Curve Modeling in Holstein Dairy Calves Using Non-Linear Functions. *Research On Animal Production*, *15*(3), 1-9. [In Persian].

Kum, D., Karakus, K., & Ozdemir, T. (2010). The best non-linear function for body weight at early phase of Norduz female lambs. *Trakia Journal of Sciences*, *8*(2).

Malakouti M., J and Homaei M. (1994). Fertility of dry matag soils. Problems and solutions. *Publications of Modares University*.1, 494.

Moreira, R.P., Mercadante, M.E.Z., Pedrosa, V.B., Cyrillo, J., & Henrique, W. (2016). Growth curves on females of the Caracu breed. Semina: Ciências agrârias, 37(4 supll), 2749-2758.

Nasri, M. F., France, J., Odongo, N. E., López, S., Bannink, A., & Kebreab, E. (2008). Modelling the lactation curve of dairy cows using the differentials of growth functions. *The Journal of Agricultural Science*, *146*(6), 633-641.

Nelder, J. A. (1961). The fitting of a generalization of the logistic curve. *Biometrics*, *17*(1), 89-110.

Pinheiro, J., Bates, D., DebRoy, S., Sarkar, D., Heisterkamp, S., & Van Willigen, B. (2016). R Core Team. nlme: linear and nonlinear mixed effects models. R package version 3.1-128.Available at http://CRAN.R-project.org/package=nlme/ (accessed 15 May 2021).

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]

Roush, W. B., & Branton, S. L. (2005). A comparison of fitting growth models with a genetic algorithm and nonlinear regression. *Poultry Science*, *84*(3), 494-502.

Salem, M.M.I., EL-Hedainy, Dalia, K.A., Latif, M.G.A., & Mahdy, A.E. (2013). Comparison of non-linear growth models to describe the growth curves in fattening crossbred and buffalo male calves. Alexandria *Journal of Agricultural Researches.* 58(3), 273-277.

Shadan, A. (1401). Investigating the effects of changing the cultivation pattern on the profitability of farmers in Tehran province. Master's thesis in agricultural economics. University of Tehran. Iran.

Tajik khari, M., Salehi, A., Peykani Macciani, Gh., & Asadi Alamuti, A. (2024). Analysis of profitabilityopportunities derived from breeding a dairy cattle herd (Case study: An industrial dairy cattle herd unit in Tehran province. *Journal of Animal Production*, 26(1), 111-121. [In Persian]

Tamari, S., Wösten, J. H. M., & Ruiz-Suárez, J. C. (1996). Testing an artificial neural network for predicting soil hydraulic conductivity. *Soil Science Society of America Journal*, 60(6), 1732-1741.

Tawhidi Mehr, h. (1400). Determining the optimal economic age of fattening in calf fattening units (case study: livestock breeding complex of Qom province). Master's thesis in agricultural economics. University of Tehran. Iran.

Ullah, M. A., Amin, M., & Abbas, M. A. (2013). Non-linear regression models to predict the lamb and sheep weight growth. *Pakistan Journal of Nutrition*, 12(9), 865.

[Downloaded from rap.sanru.ac.ir on 2026-09-03]

[DOI: 10.61882/rap.2024.1471]